رياضيات سنة ثالثة

سلم تصحيح (بحث جبر خطية (٢)) الدورة الإضافية ٢٠١٥-٢٠١٦ د. بسام خلوف

السؤال الأول (25):

1) $(0,0,0) \in U \Rightarrow U \neq \phi$ 5

$u=(a,b,c) : a=b=c \Rightarrow u=(a,a,a) \in U$; $v=(b,b,b) \in U$

$u-v=(a-b, a-b, a-b)$ 5 $\in U$

• $\forall \alpha \in R : \forall u \in U :$ $\alpha u = \alpha(a,a,a)$ 5 $(\alpha a, \alpha a, \alpha a) \in U$

إذاً U مودول جزئي في R^3

2) • $\forall (a,b,c) \in R^3 :$ $(a,b,c)=(a,a,a)+(0, b-a, c-a)$

$(0, b-a, c-a) \in W$ و $(a,a,a) \in U$ 5 وذلك مهما كانت

، وذلك فإن $(a,b,c) \in U+W$ إذاً $R^3 = U+W$.

• $(a,b,c) \in U \cap W \Rightarrow (a,b,c) \in U$ و $(a,b,c) \in W \Rightarrow$

$a=b=c$ و 5 $a=0 \Rightarrow a=b=c=0$

إذاً $U \cap W = \{0\}$.

وبالتالي $U \cap W = \{0\}$ و $R^3 = U+W$ يكون

$R^3 = U \oplus W$.

السؤال الثاني (35)

1) أي كل عنصر x في $M = A \oplus B$ يكتب بصورة وحيدة على الشكل $x=a+b$ حيث $a \in A$ و $b \in B$. وبالتالي العلاقة $f(x)=a$ تعرف تطبيقاً من M في A

• $\forall \alpha, \beta \in R ; \forall x, y \in M :$ $x = a_1+b_1 ; y=a_2+b_2$; $a_i \in A ; b_i \in B$

$f(\alpha x+\beta y) = f[\alpha(a_1+b_1)+\beta(a_2+b_2)]$ 5 $= f[(\alpha a_1+\beta a_2)+(\alpha b_1+\beta b_2)]$

حيث أن A و B مودولان جزئيان من M فإن $\alpha a_1+\beta a_2 \in A$ و $\alpha b_1+\beta b_2 \in B$

وذلك يكون حسب تعريف f : 5

$f(\alpha x+\beta y)=\alpha a_1+\beta a_2 =$

$= \alpha f(a_1+b_1)+\beta f(a_2+b_2) = \alpha f(x)+\beta f(y)$

إذاً f هومومورفيزم مودولي من M في A .

2) f غامر حيث لكل $a \in A$ يوجد $a=a+0 \in A+B$ بحيث $f(a+0)=a$ ومنه $\text{im} f = A$. 5 وأيضاً يكون $\text{Ker} f = B$ لأن

$\text{Ker} f = \{x=a+b \in M : f(x)=0\} = \{x \in M : f(a+b)=a=0\}$ و $\forall b \in B$

وحسب المبرهنة الأساسية يكون 5

$M/\text{Ker} f \simeq \text{im} f \Rightarrow M/B \simeq A$.

المتتالية $0\to B \xrightarrow{i} A\oplus B \xrightarrow{f} A \to 0$ تامة لأنها من المتتاليات الجزئية:

المتتالية $0 \to B \xrightarrow{i} A\oplus B$ تامة لأن i متباين. 5

المتتالية $B \xrightarrow{i} A\oplus B \xrightarrow{f} A$ تامة لأن $B = \mathrm{Im}\, i = \mathrm{Ker} f$ 5

المتتالية $A\oplus B \xrightarrow{f} A \to 0$ تامة لأن f غامر. 5

السؤال الثالث (20): إذا كان U يحوي مودولاً جزئياً أعظمياً C من M وليكن M نصف بسيط فيوجد M_1 مودول جزئي في M بحيث أن $M = C\oplus M_1$ ومنه يكون: 5

$U = M\cap U = (C\oplus M_1)\cap U = (C\cap U)\oplus(M_1\cap U) = C\oplus(M_1\cap U) \Rightarrow$ 5

$U/C \cong M_1\cap U$ وبما أن C أعظمي في U فإن U/C بسيط ومنه سيكون المودول $M_1\cap U$ بسيطاً أيضاً وعليه فإن $M_1\cap U \subset U$ ومنه U يحوي مودولاً جزئياً بسيطاً.

السؤال الرابع (20)

1) ⇐ 2) نفرض أن M نيوتري، ولتكن $\mathcal{L}$ جماعة غير خالية من المودولات الجزئية في M ولنأخذ أحدها M_0 إذا كان M_0 أعظمياً تم المطلوب، وإلا يوجد في $\mathcal{L}$ مودول جزئي مثل M_1 بحيث أن $M_0 \subsetneq M_1$ إذا كان M_1 أعظمياً تم المطلوب، وإلا يوجد في $\mathcal{L}$ مودول جزئي مثل M_2 بحيث $M_1 \subsetneq M_2$. وهكذا باستمرار هذه العملية نحصل على سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في M مثل 5

$M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots$

وحيث أن M نيوتري فيجب أن تنقطع هذه السلسلة، أي يجب أن يوجد عدد طبيعي مثل n بحيث $M_k = M_n$ من أجل $k \geq n$. وعندئذٍ سيكون M_n عنصراً أعظمياً في $\mathcal{L}$ ولكون $\mathcal{L}$ كيفية فإن M يحقق الشرط الأعظمي.

2) ⇐ 1) إذا لم يكن M نيوترياً فسيوجد متسلسلة متزايدة (لا نهائية) من المودولات الجزئية في M لا تنقطع مثل 5

$M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots$

وواضح عندئذٍ أن هذه المتسلسلة ليس فيها عنصر أعظمي مما يخالف الفرض أن M يحقق الشرط الأعظمي، إذن M نيوتري.